Working Papers

Technische Hochschule Ingolstadt

Zukunft in Bewegung

Technische Hochschule Ingolstadt

Working Paper

Heft Nr. 57 aus der Reihe
„Arbeitsberichte – Working Papers"

ISSN 1612-6483
Ingolstadt, im Dezember 2020

Prof. Dr. Stefan May

Prognosefreie Zinskurvenpositionierung und Länderallokation für ein EUR-Staatsanleihen-Portfolio

Abstract

Im Rahmen einer zweistufigen Vorgehensweise werden die zwei zentralen Fragestellungen jeder internationalen Anleihestrategie thematisiert – Zinsstrukturpositionierung und Ländergewichtung. Konkret wird vorgeschlagen, für jedes Land die optimale Restlaufzeit auf Grundlage der jeweils aktuellen Zinsstrukturkurve zu ermitteln. Die Ländergewichtung dagegen sollte darauf aufbauend im Spannungsfeld zwischen einem Diversifikationsindex und der zu erwartenden Portfoliorendite festgelegt werden. Bei beiden Festlegungen wird ganz bewusst auf explizite Marktprognosen verzichtet. Stattdessen leiten sich sowohl die Zinsstrukturpositionen als auch die Ländergewichte ausschließlich aus öffentlich verfügbaren Marktinformationen ab.

Inhalte

1. Hintergrund und Idee des Ansatzes

Strategische Vorgaben vieler Wertpapierportfolios, insbesondere solcher, die der Altersvorsorge dienen, zwingen das Management mehr oder weniger dazu, Teile des Vermögens in extrem risikoarme Anlagen, d.h. in der Regel in Staatsanleihen, zu investieren. Speziell in Deutschland, aber auch in einer Reihe anderer europäischer Länder sind die Renditen öffentlicher Anleihen aktuell jedoch Null oder sogar negativ. Aus diesem Grund stellt sich vor allem aus deutscher Perspektive zwingend die Frage nach höher rentierlichen Anleihealternativen. Hier gibt es grundsätzlich drei Möglichkeiten:

- Investition in EUR-Staatsanleihen.
- Investition in internationale Staatsanleihen außerhalb des EUR-Währungsraumes
- Investition in Unternehmensanleihen

Die zweite Alternative ist mit Währungsrisiken verbunden und die dritte mit Ausfallrisiken. Zwar unterliegen auch EUR-Staatsanleihen einem Ausfallrisiko. Aus einer Reihe von Gründen kann man aber davon ausgehen, dass die Europäische Zentralbank (EZB) den Zahlungsausfall einzelner EUR-Länder mit aller Macht („koste es was es wolle") unterbinden wird, schon allein um ein Scheitern des EUR-Projektes zu verhindern. EUR-Staatsanleihen sind derzeit somit durch eine Art „EZB-Put" geschützt.

Vor dem skizzierten Hintergrund besteht das Forschungsziel der vorliegenden Arbeit darin, einen Ansatz zu entwickeln, mit dessen Hilfe auf rationaler Basis ein aus EUR-Staatsanleihen bestehendes Anleihedepot konstruiert werden kann. Hierbei wird eine zentrale Erkenntnis der Finanzmarktforschung berücksichtigt, welche die Tauglichkeit von Finanzmarktprognosen als Grundlage für Anlageentscheidungen erheblich in Frage stellt.

Aufgrund der in dieser Hinsicht desillusionierenden Forschungsergebnisse wird mit der vorliegenden Arbeit ein Ansatz präsentiert, bei dessen Umsetzung auf Finanzmarktprognosen vollständig verzichtet werden kann.

Das Ergebnis ist ein prognosefreier, ausschließlich auf Marktinformationen beruhender Investmentansatz, welcher die beiden zentralen Probleme jeder internationalen Anleihestrategie löst – Zinsstrukturpositionierung und Länderallokation.

2. Zinsstrukturpositionierung

Abschnitt 2 thematisiert die erste der beiden grundsätzlichen Fragen: Wie lange soll die durchschnittliche Restlaufzeit bzw. Duration eines Länderengagements sein? Um diese Frage für jedes Land auf einer rationalen und prognosefreien Grundlage beantworten zu können, wurde eine Entscheidungsregel konzipiert, welche ausschließlich auf öffentlich verfügbaren Marktinformationen beruht, insbesondere zur Form der Zinsstrukturkurve des Landes.

2.1 Anleiheperformance bei konstanter Zinsstrukturkurve

Die (stochastische) Performance $\widetilde{dV}$ einer Anleihe mit dem aktuellen Wert V_0 lässt sich in drei Komponenten zerlegen:

(1) $$\widetilde{dV} = DUR * \widetilde{dR} * V_0 + K + (V_1 - V_0)_{\widetilde{dR}=0}$$

Hierbei bezeichnet DUR die Duration der Anleihe, $\widetilde{dR}$ die Veränderung der Marktzinsen (bzw. die Veränderung der gesamten Zinsstrukturkurve), *K* den Kupon und $(V_1 - V_0)_{\widetilde{dR}=0}$ die Veränderung des Anleihekurses **unter der Annahme, dass die Zinskurve unverändert bleibt** ($\widetilde{dR}$=0).

Kupon-, Zinsänderungs- und Zinsstruktureffekt

Für die zu erwartende Performance gilt daher:

(2) $$E(\widetilde{dV}) = DUR * E\left(\widetilde{dR}\right) * V_0 + K + (V_1 - V_0)_{\widetilde{dR}=0}$$

Der erste Summand der rechten Seite von (2) repräsentiert den (mittels Duration geschätzten) **Zinsänderungseffekt**, der zweite den **Kuponbeitrag** und der dritte Summand den sogenannten **Zinsstruktureffekt.**[1]

Unterstellen wir, dass die Zinsstrukturkurve konstant bleibt ($\widetilde{dR} = 0$) und dass dies auch erwartet wird [$E(\widetilde{dR})$=0], dann verändert sich (2) zu:

(3) $\quad E(\widetilde{dV}) = K + (V_1 - V_0)_{\widetilde{dR}=0}$

Die zu erwartende Depotwertänderung resultiert dann lediglich aus dem Kuponeinkommen sowie der Depotwertänderung aufgrund des Zinsstruktureffektes. Den Gesamteffekt bezeichnen wir als den **prognosefreien Zinsstrukturbeitrag.**

Determinanten des Zinsstruktureffektes

Wie sich im Folgenden zeigen wird, hängt der Zinsstruktureffekt $(V_1 - V_0)_{\widetilde{dR}=0}$ ausschließlich von der Steilheit der Zinsstrukturkurve ab, d.h. er lässt sich durch Finanzmarktgrößen ermitteln, die am Markt direkt beobachtet werden können. Hierzu errechnen wir zunächst auf Grundlage der vorliegenden Spotratekurve ($r_1;\ r_2;\ \ldots\ldots;\ r_N$) den aktuellen Barwert der Anleihe V_0 und unterstellen dabei eine Restlaufzeit von *N* Jahren und einen Kuponsatz von *K*:[2]

(4) $\quad V_0 \quad = \sum_{n=1}^{N} K * e^{-r_n n} + e^{-r_N N}$

---

[1] Vielleicht hat der eine oder andere Leser die Vermutung, dass der Zinsstruktureffekt Null sein müsste, weil sich bei unveränderter Zinskurve auch der Wert der Anleihe nicht ändern sollte, d.h. dass $V_1 = V_0$ gelten müsste. Dies ist jedoch nicht der Fall, denn selbst bei unveränderter Zinskurve wird der Zahlungsstrom der Anleihe nach einer Periode (z.B. nach einem Jahr) mit anderen – in der Regel geringeren - Zinssätzen diskontiert, was ihren Barwert verändert.

[2] Das in den folgenden Formeln verwendete Symbol *e* bezeichnet die für stetige Zinsrechnungen relevante Eulerzahl *e = 2,71828182(…).* Sie entspricht genau dem Wert, den eine Population von 1 nach einer Periode erreicht hat, wenn sie sich in jeder von *n* Teilperioden anteilig verdoppelt, d.h. wenn die (stetige) Wachstumsrate 100 % beträgt und wenn n→ ∞ gilt. „Anteilig verdoppeln" meint, dass z.B. bei 4 Teilperioden der Zuwachs in jeder der vier Perioden 1/4 = 25 % beträgt und bei n Teilperioden 1/n. Als Beispiel wählen wir die Entwicklung einer Population (Startwert = 1) über ein Jahr mit 4 Teilperioden: Periode 0: 1, Periode 1: $\left(1+\frac{1}{4}\right)^1 = 1{,}25^1 = 1{,}25$; Periode 2: $\left(1+\frac{1}{4}\right)^2 = 1{,}25^2 = 1{,}5625$; Periode 3: $\left(1+\frac{1}{4}\right)^3 = 1{,}25^3 = 1{,}953125$; Periode 4: $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 1{,}25^4 = 2{,}44140625$.
Man kann sich leicht davon überzeugen, dass sich dieser Wert, der für *n*=4, d.h. bei vier Teilperioden „nur" 2,4414062 beträgt, mit jeder Erhöhung von *n* immer weiter dem Wert *e = 2,71828182(…)* annähert. Tatsächlich ist *e* genau so definiert: $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828182\,(\ldots)$. Die Eulerzahl ist somit der Grenzwert des unterjährigen Zinsfaktors.

$$= \sum_{n=1}^{N-1} K * e^{-r_n n} + K * e^{-r_N N} + e^{-r_N N}$$

Der nach einer bestimmten Periode letztlich vorliegende Kurs der Anleihe $\tilde{V}_1$ wird davon bestimmt, wie sich die Zinsstrukturkurve bis dahin verändert haben wird; er ist somit eine stochastische Größe. Doch wie bereits erwähnt, kann unter der **Voraussetzung, dass sich die Zinsstrukturkurve nicht verändert** ($\widetilde{dR}$=*0*), ein konkreter Kurswert $V_{1;dR=0}$ wie folgt bestimmt werden:

(5) $$V_{1;dR=0} = \sum_{n=1}^{N-1} K * e^{-r_n n} + e^{-r_{N-1}(N-1)}$$

Somit ergibt sich der Zinsstruktureffekt $(V_1 - V_0)_{\widetilde{dR}=0}$, d.h. die Veränderung des Kurswertes unter der Annahme unveränderter Zinsen, durch die einfache Differenz der beiden Kurswerte (5) und (4):

(6) $$(V_1 - V_0)_{\widetilde{dR}=0} = (V_{1;dR=0} - V_0) = e^{-r_{N-1}(N-1)} - (1 + K) * e^{-r_N N}$$

Geht man davon aus, dass es sich um eine pari-Anleihe handelt (*K*=*R*$_N$), verwandelt sich (6) in:

(7) $$(V_1 - V_0)_{\widetilde{dR}=0} = e^{-r_{N-1}(N-1)} - (1 + R_N) * e^{-r_N N}$$

Gleichung (7) macht deutlich, dass die Höhe des Zinsstruktureffektes lediglich vom aktuellen Renditeniveau R_N der Anleihe, von der Restlaufzeit *N* sowie von den beiden Spotrates r_N und r_{N-1} abhängig ist – mit einem Wort: von der Steilheit der Spotratekurve an der Stelle *N.*[3]

2.2 Optimale Restlaufzeit

Gleichung (7) liefert uns eine Regel, welche es erlaubt, für jeden Anleihemarkt, der durch eine konkrete Zinsstrukturkurve charakterisiert werden kann, eine optimale Restlaufzeit zu bestimmen:

(8) $$max_N \rightarrow R_N + [e^{-r_{N-1}(N-1)} - (1 + R_N) * e^{-r_N N}]$$

[3] Der Zinsstruktureffekt lässt sich approximativ auch auf Basis einer Renditekurve (R_1; R_2; ......; R_N) ermitteln. Anstatt risikofreier Zinssätze („spot rates“) r_N und r_{N-1} werden in (6) bzw. (7) die entsprechenden Renditen R_N und R_{N-1} eingesetzt. Es lässt sich zeigen, dass dadurch bei ansteigendem Zinskurvenverlauf ein etwas geringerer Zinsstruktureffekt ausgewiesen wird.

Die hinter (8) stehende Maximierungsregel lautet: Wähle die Restlaufzeit *N* so, dass die Summe aus Kuponeinkommen und Zinsstruktureffekt (d.h. der Zinsstrukturbeitrag) maximal ist.[4]

Damit kann für jedes Land die grundsätzliche Frage beantwortet werden, welche Restlaufzeit bzw. Duration ein entsprechendes Anleiheinvestment idealerweise haben sollte. Zinsstrukturprognosen spielen dabei keine Rolle.

3. Wahl der Länderallokation

Durch die im letzten Abschnitt dargestellten Zusammenhänge verfügen wir über eine Methode, mit der wir für jedes Land eine optimale Restlaufzeit des entsprechenden Anleiheinvestments festlegen können, ohne dabei auf Zinsprognosen zugreifen zu müssen.

Gegenstand von Abschnitt 3 ist nun die zweite Frage, welches Gewicht jedes Land in einem EUR-Staatsanleiheportfolio einnehmen sollte. Im Rahmen des vorgeschlagenen Ansatzes sind die entscheidenden Größen bei der Optimierung der Länderallokation zum einen die Staatsanleiherenditen in den verschiedenen Ländern und zum anderen die entsprechenden Länderausfallwahrscheinlichkeiten.

Während Staatsanleiherenditen objektive und allgemein verfügbare Finanzmarktgrößen darstellen, müssen die entsprechenden Ausfallwahrscheinlichkeiten geschätzt werden. Hierfür gibt es darauf spezialisierte Institute - sogenannte Rating Agenturen wie Standard & Poors, Moody´s, Fitch usw. -, die für jedes Land mittels aufwändiger Verfahren eine explizite Ausfallwahrscheinlichkeit ermitteln. Man spricht in diesem Fall von **realen Ausfallwahrscheinlichkeiten**.

Neben den realen, letztlich auf Prognosen basierenden Ausfallwahrscheinlichkeiten, gibt es jedoch auch das Konzept einer impliziten **risikoneutralen Ausfallwahrscheinlichkeit**, welche ausschließlich aus allgemein verfügbaren Marktinformationen abgeleitet wird.

Entsprechend der Philosophie, welche bereits der Zinsstrukturpositionierung aus Abschnitt 2 zugrunde liegt, wollen wir auch bei der Bestimmung der optimalen Länderallokation grundsätzlich auf explizite Prognosen verzichten. Auch bei der Wahl der Ländergewichte sollen

---

[4] Im Maximierungskalkül (8) wird nicht berücksichtigt, dass die Zinsstrukturbeiträge bei längeren Laufzeiten einem höheren Zinsänderungsrisiko unterliegen. Erweiterungen von (8), welche dies berücksichtigen, sind daher äußerst sinnvoll. Eine einfache Variante besteht darin, die Laufzeit so zu wählen, dass nicht der Zinsstrukturbeitrag an sich, sondern der durch die entsprechende Duration dividierte Zinsstrukturbeitrag maximal ist.

daher ausschließlich öffentlich verfügbare Marktparameter, d.h. Renditen und risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeiten eine Rolle spielen.

Doch auch ganz grundsätzlich und unabhängig davon, ob nun real oder risikoneutral, handelt es sich bei einer Ausfallwahrscheinlichkeit um ein subtiles Konzept, das im folgenden Abschnitt 3.1 deshalb etwas grundsätzlicher und ausführlicher dargestellt wird.

3.1 Kumulierte, absolute und bedingte Ausfallwahrscheinlichkeiten

Das Ereignis, dass eine bestimmte Festzinsanlage während des Zeitintervalls *[0; t]* ausfällt, sei im Folgenden mit D_t bezeichnet; dass dazu komplementäre Ereignis, dass die Anlage im Intervall *[0; t]* alle versprochenen Zahlungen leistet, mit $\overline{D}_t$. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind $W(D_t)$ und $W(\overline{D}_t)$. Aufgrund der Komplementarität beider Ereignisse gilt:

(9) $$W(D_t) = 1 - W(\overline{D}_t) \;\forall\; t$$

Betrachten wir zwei aufeinanderfolgende Zeitpunkte *t* und *t+dt*, dann entspricht die Differenz $W(D_{t+dt}) - W(D_t)$ der absoluten Wahrscheinlichkeit, dass die Anlage im Verlaufe des (linksoffenen) Intervalls *(t; t+dt]* ausfällt. Dieses Ereignis bedeutet jedoch aussagenlogisch, dass die Anlage bis zum Zeitpunkt *t* intakt ist (d.h. sämtliche Zahlungen störungsfrei leistet) ***und*** bis zum Zeitpunkt *t+dt* ausfällt, was mengentheoretisch dem Ereignis $(D_{t+dt} \cap \overline{D}_t)$ entspricht. Für die entsprechende Wahrscheinlichkeit gilt daher:

(10) $$W(D_{t+dt} \cap \overline{D}_t) = W(D_{t+dt}) - W(D_t)$$

Wegen (9) gilt aber auch:

(11) $$W(D_{t+dt} \cap \overline{D}_t) = W(\overline{D}_t) - W(\overline{D}_{t+dt})$$

Mit (11) wird also die absolute („unbedingte“) Wahrscheinlichkeit ausgedrückt, dass eine Anlage genau im Zeitintervall *(t; t+dt]* ihren Zahlungsverpflichtungen nicht nachkommt. Wie bereits erwähnt entspricht dies der Wahrscheinlichkeit, dass die Anlage im Zeitintervall *[0; t]* zahlungsfähig ist ***und*** im Zeitintervall *[0; t+dt]* ausfällt.

Bei der Wahrscheinlichkeit entsprechend (11) handelt es sich um eine a priori Wahrscheinlichkeit aus der Perspektive der Periode *0*, in der noch nicht klar ist, ob die Anlage bis t tatsächlich überlebt.[5]

Letztlich interessiert sind wir aber an der Wahrscheinlichkeit des Ausfalls einer Anlage in *(t; t+dt]* ***von der wir wissen***, dass sie in *[0; t]* störungsfrei geleistet hat. M.a.W., relevant ist nicht die absolute Ausfallwahrscheinlichkeit entsprechend (11), sondern die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit.

Eine bedingte Wahrscheinlichkeit $W(D_{t+dt} / \overline{D}_t)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von D_{t+dt} ***unter der Voraussetzung,*** dass $\overline{D}_t$ bereits eingetreten ist. Konkret: $W(D_{t+dt} / \overline{D}_t)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ausfalls einer Anlage in einer bestimmten Periode, welche in der Vorperiode störungsfrei geliefert hat.[6] Sie wird manchmal auch als Ausfallintensität oder als „hazard rate" bezeichnet. Um die folgenden Umformungen übersichtlich zu halten, wollen wir diese bedingte Wahrscheinlichkeit mit $w(t)$ bezeichnen:

(12) $$w(t) := W(D_{t+dt} / \overline{D}_t)$$

Aufgrund des Multiplikationssatzes für abhängige Ereignisse gilt $W(D_{t+dt} \cap \overline{D}_t) = W(D_{t+dt} / \overline{D}_t)W(\overline{D}_t)$, was umgeformt werden kann zu:

(13) $$w(t) = \frac{W(D_{t+dt} \cap \overline{D}_t)}{W(\overline{D}_t)}$$

Wegen (11) lässt sich (13) auch wie folgt ausdrücken:

(14) $$w(t) = \frac{W(\overline{D}_t) - W(\overline{D}_{t+dt})}{W(\overline{D}_t)} \Leftrightarrow W(\overline{D}_t) - W(\overline{D}_{t+dt}) = w(t)W(\overline{D}_t)$$

Multiplizieren wir beide Seiten von (14) mit -1, erhalten wir:

---

[5] Dies ist der Grund für die logische „und"-Verknüpfung bzw. die mengentheoretische Durchschnittsbildung.

[6] Vielen bereitet es erhebliche Schwierigkeiten, die Ereignisse $(A \cap B)$ und (A / B) bzw. die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten auseinander zu halten. Bezeichnet doch $W(A \cap B)$ die Wahrscheinlichkeit, dass A **und** B eintritt und $W(A / B)$ die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, **unter der Voraussetzung**, dass B bereits eingetreten ist. Schon semantisch fällt es schwer, beides zu unterscheiden. Eine Hilfestellung mag darin bestehen, sich vor Augen zu führen, dass bei der Interpretation von $W(A \cap B)$ der Eintritt von B noch in der Schwebe ist, wobei bei $W(A / B)$ der Eintritt von B vorausgesetzt und damit als sicher angenommen wird.

(15) $W(\overline{D}_{t+dt}) - W(\overline{D}_t) = -\,w(t)W(\overline{D}_t)$

Dies ergibt für $dt \to 0$ die einfache Differentialgleichung

(16) $\frac{dW(\overline{D}_t)}{dt} = -w(t)W(\overline{D}_t)$

mit der Lösung:

(17) $W(\overline{D}_t) = e^{-\int_0^t w(t)d\tau}$

Bezeichnet $\overline{w}(t)$ die durchschnittliche Ausfallintensität im Intervall *[0; t]*, kann die „Überlebenswahrscheinlichkeitsformel“ (17) vereinfacht werden zu:

(18) $W(\overline{D}_t) = e^{-\overline{w}(t)t}$

Für die entsprechende Ausfallwahrscheinlichkeit $W(D_t)$ gilt:

(19) $W(D_t) = 1 - e^{-\overline{w}(t)t}$

Beispiel : *Gegeben seien die folgenden kumulierten Ausfall- und „Überlebenswahrscheinlichkeiten“ über 5 Jahre für eine mit Einfach-B geratete Anleihenemission:*

Periode	1	2	3	4	5
$W(D_t)$	0,04	0,09	0,15	0,20	0,24
$W(\overline{D}_t)$	0,96	0,91	0,85	0,80	0,76

Für Periode 3 beispielsweise lässt sich der Tabelle entnehmen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Zahlungsausfalls in den ersten drei Jahren 15 % beträgt, bzw. die Wahrscheinlichkeit störungsfreier Zahlungen im gleichen Zeitraum 85 %. Insofern handelt es sich bei den Werten in der Tabelle um kumulierte Wahrscheinlichkeiten. Für die Ausfallintensitäten der diversen Perioden gilt entsprechend Formel (6): $w(1)$ *= (0,04-0)/1 = 4 %;* $w(2)$*=(0,09-0,04)/0,96 = 5,21 %;* $w(3)$ *= (0,15-0,09)/0,91 = 6,59 %;* $w(4)$ *= (0,20-0,15)/0,85 = 5,88 %;* $w(5)$ *= (0,24-0,20)/0,80 = 5,00 %. Die durchschnittliche Ausfallintensität* $\overline{w}(5)$ *über alle Perioden hinweg ergibt sich als geometrisches Mittel:* $\overline{w}(5)$ *= [1,04*1,0521*1,0659*1,0588*1,05]^(1/5)-1 = 5,33 %*

Mit Hilfe dieses Wertes lassen sich die Überlebens- bzw. Ausfallwahrscheinlichkeiten der Tabelle reproduzieren, beispielsweise für Periode 4:

$W(\overline{D}_4) = e^{-0{,}0533*4} = 0{,}8079 = 80{,}79\ \%$

$W(D_4) = 1 - e^{-0{,}0533*4} = 0{,}1921 = 19{,}21\ \%$

Die ermittelten Werte stimmen weitgehend mit den entsprechenden Tabellenwerten überein. Die kleinen Abweichungen erklären sich durch die Vermischung stetiger Wachstumskalkulationen entsprechend Gleichungen (10) und (11) mit der gleichzeitigen Verwendung des diskreten geometrischen Durchschnitts bei der Berechnung von $\overline{w}(5)$.

3.2 Schätzung risikoneutraler Ausfallintensitäten mittels Credit-Default-Spreads

Gegeben seien zwei Anlagemöglichkeiten, eine sichere (s.A.) und eine riskante Anlage (r.A.), welche mit einem Ausfallrisiko behaftet ist. Die risikolose Verzinsung sei mit *r* und der Zinsaufschlag der Risikoanlage mit *s* bezeichnet. Weiter sei gegeben die reale (Rating-basierte) Wahrscheinlichkeit $\hat{w}$, mit der die Risikoanlage ausfällt.[7] Im Falle eines Ausfalles erhält

[7] Es ist für die weitere Argumentation irrelevant, ob und woher wir die konkreten Werte für diese „realen“ Wahrscheinlichkeiten kennen.

der Anleger die versprochenen Zinsen, aber lediglich einen Bruchteil *RC* („Recovery Rate“) des Nennwertes.[8]

In einem Ein-Perioden-Modell können die Auszahlungen beider Anlagen am Ende der Periode (t = 1) tabellarisch wie folgt zusammengefasst werden:

	Riskante Anlage fällt aus	Riskante Anlage zahlt störungsfrei
Objektive („reale“) Wahrscheinlichkeit	$\hat{w}$	$(1-\hat{w})$
Auszahlung der sicheren Anlage	$(1+r)$	$(1+r)$
Auszahlung der riskanten Anlage	$(RC+r+s)$	$(1+r+s)$

Erwartungswerte und reale Ausfallwahrscheinlichkeiten

Für die Erwartungswerte der beiden Anlagen *gilt:* $E(s.A.) = (1+r)$ *und* $E(r.A.) = \hat{w}(RC+r+s)+(1-\hat{w})(1+r+s)$. Wenn die riskante mit der sicheren Anlage konkurrieren soll, dann muss sie aufgrund der (unterstellten) Risikoaversion der Anleger[9] einen höheren Erwartungswert bieten, d.h. es muss gelten:

(20) $\hat{w}(RC+r+s) + (1-\hat{w})(1+r+s) > (1+r)$

Risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeiten

Nun kann man zusätzlich zur realen Ausfallwahrscheinlichkeit $\hat{w}$ für gegebene Werte von *RC, r* und *s* auch eine Ausfallwahrscheinlichkeit *w* konstruieren, welche die Erwartungswerte von riskanter und sicherer Anlage angleicht, d.h. für die gilt:

(21) $w(RC+r+s)+(1-w)(1+r+s) = (1+r)$

---

[8] Unterstellen wir einen Nennwert von 100 sowie r = 1,5 %, s = 2 % und RC = 60 %, dann wird die riskante Anlage im Falle des Ausfalles lediglich 0,6*100+(0,015+0,02)*100 = 63,5 zurückzahlen. Dass hierbei unterstellt wird, dass zwar die Zinsen, aber nur ein Bruchteil des Nennwertes bezahlt wird, vereinfacht die folgende Argumentation.

[9] Entgegen einem weit verbreiteten Missverständnis bedeutet Risikoaversion keineswegs, dass Anleger kein Risiko eingehen wollen. Stattdessen besagt sie, dass Anleger für die Übernahme von Risiken eine „Prämie“ in Form eines höheren Erwartungswertes haben wollen. Der Grad der Risikoaversion bestimmt die Höhe dieser Prämie. Risikoneutrale Anleger dagegen sind indifferent zwischen zwei Anlagen, wenn diese denselben Erwartungswert haben – völlig unabhängig von deren Streuung bzw. Risiko. In der angewandten Portfoliotheorie wird grundsätzlich für alle Anleger Risikoaversion unterstellt, allerdings mit durchaus unterschiedlichen Ausprägungen.

Diese spezielle Wahrscheinlichkeit wird als **implizite risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit** bezeichnet. Ihre besondere Bedeutung erhalten risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten durch den Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung. Dieser lautet:

Vollständige Märkte sind arbitragefrei dann und nur dann, wenn genau ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß existiert. Die mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten gebildeten Erwartungswerte der (diskontierten) Auszahlungen entsprechen für jedes Wertpapier seinem arbitragefreien Preis.[10]

Gleichung (21) repräsentiert daher eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine arbitragefreie Funktionsweise eines Finanzmarktes sowie der entsprechenden Bewertungsregeln.[11] Zugleich kann (21) verwendet werden, um eine konkrete risikoneutrale (arbitragefreie) Ausfallwahrscheinlichkeit zu ermitteln.[12] Hierzu stellen wir Gleichung (21) wie folgt um:[13]

$w(RC+r+s)+(1-w)(1+r+s) = (1+r) \Leftrightarrow wRC+wr+ws+(1+r+s)-w-wr-ws = (1+r) \Leftrightarrow wRC + s - w = 0 \Leftrightarrow s = w-wRC \Leftrightarrow s = w(1-RC) \Leftrightarrow$

$$(22) \qquad w = \frac{s}{1-RC}$$

Man beachte, dass aufgrund (20) und (21) die risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit immer höher sein muss als die entsprechende reale Ausfallwahrscheinlichkeit[14], d.h. es muss gelten: $w>\hat{w}$.

---

[10] Vor allem in sehr mathematisch geprägten Beiträgen zur Bewertungstheorie wird die Kernaussage dieses Satzes häufig in drei separate Sätze zerlegt, wobei im ersten die Existenz einer risikoneutralen Wahrscheinlichkeit bei Arbitragefreiheit bewiesen wird, im zweiten deren Eindeutigkeit für vollständige Märkte und im dritten die arbitragefreie Bewertung durch Erwartungswertbildung mittels risikoneutraler Wahrscheinlichkeiten. Der Verfasser ist aber der Meinung, dass es aus didaktischen Gründen sinnvoll ist, diese drei Sätze zu einem Satz zu verdichten.

[11] Die Annahme der Existenz risikoneutraler Wahrscheinlichkeiten impliziert daher keineswegs, dass die Marktakteure risikoneutral sind - was fälschlicherweise immer wieder behauptet wird.

[12] Genau genommen ist es eine Ausfallintensität, was aber im Ein-Perioden-Kontext des Abschnittes 3.2 keinen Unterschied macht.

[13] Aus Gründen der besseren Nachvollziehbarkeit wird die folgende Gleichung (22) im Kontext eines Ein-Perioden-Modells abgeleitet. Dies hat den besonderen Vorteil, dass nicht zwischen kumulierten, absoluten und bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten unterschieden werden muss. Trotz dieser Vereinfachung bleibt der Gehalt des Modells vollständig erhalten.

[14] Inhaltlich ist dies aufgrund der unterstellten Risikoaversion der Marktteilnehmer der Fall. Mathematisch gilt: Wenn die linke Seite von (20) auf das risikoneutrale Niveau (*1+r)* abgesenkt werden soll, muss der Erwartungswert mit einer höheren Ausfallwahrscheinlichkeit gebildet werden.

3.3 Diversifikationsindex versus Erwartungswertmaximierung

Gegeben seien *N* Länder, mit jeweils eigenen ausstehenden Anleihen. Für jedes Land *i* liegen folgende Informationen vor: Ausfallwahrscheinlichkeiten[15] $W(D_i)$ der Anleihen des Landes sowie feste Renditewerte[16] R_i.

Zu erwartende Rendite versus Diversifikationsindex

Als Hilfsgröße („Proxy“) für die zu erwartende Rendite eines Anleiheinvestments in Land *i* definieren wir: [17]

$$(23) \qquad E(\tilde{R}_i) = R_i[1 - W(D_i)] \ \forall \ i$$

Wird das Gewicht eines Landes im Portfolio mit θ_i bezeichnet, dann gilt für die zu erwartende Rendite eines Länderportfolios *P*:

$$(24) \qquad E(\tilde{R}_P) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i R_i[1 - W(D_i)]$$

Eine alleinige Maximierung von (24) hätte zur Folge, dass zu 100 % in das Land investiert würde, dessen Rendite-Erwartungswert (23) maximal ist. Zugleich ist damit aber auch das unsystematische Risiko des Anleihedepots maximal, bzw. die Diversifikation minimal.

Eine Allokationsregel, mit deren Hilfe die Ländergewichte $(\theta_1; \dots; \theta_N)$ so festgelegt werden, dass Rendite und Risiko in einem ausgewogenen Verhältnis stehen, benötigt daher ein

---

[15] Grundsätzlich können diese Wahrscheinlichkeiten explizit und „real“ geschätzt werden, oder aber sie werden „implizit“ als risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten aus aktuellen Marktdaten abgeleitet, wie in Abschnitt 3.2 beschrieben. In diesem Fall werden die (durchschnittlichen) Ausfallintensitäten entsprechend (22) ermittelt, woraus sich dann laufzeitenabhängig die Ausfallwahrscheinlichkeiten entsprechend (19) ergeben.

[16] Wir unterstellen, dass für jedes Land die Entscheidung über die jeweils optimale Restlaufzeit („Zinsstrukturpositionierung“) bereits getroffen ist. Dies kann, muss aber nicht entsprechend der Methode geschehen, die in Abschnitt 2 vorgeschlagen wurde. In jedem Fall repräsentiert R_i die Rendite der für das Land i gewählten Restlaufzeit – aufgrund welcher Methode auch immer. Vergleiche hierzu auch Fußnote 4.

[17] Genau genommen ist (23) als Erwartungswert unvollständig, denn es fehlt der Gegenwahrscheinlichkeitsterm $R_i W(D_i)$. Der tatsächliche Rendite-Erwartungswert ist also höher. Für den Zweck der vorliegenden Ausarbeitung – die Festlegung konkreter Ländergewichte – ist die Spezifikation (23) aber ausreichend.

Diversifikationskriterium, welches der reinen Erwartungswertmaximierung (24) entgegenwirkt.

Hierzu bildet man für jedes Land ein „Risikogewicht" als Produkt aus „normaler" Gewichtung und Ausfallwahrscheinlichkeit [d.h. $\theta_i W(D_i)$] und definiert einen von den diversen $\theta\acute{}s$ abhängigen Diversifikationsindex *S*:

(25) $S(\theta_1; \dots; \theta_N) = (1 - \sum_{i=1}^{N} \theta_i^2 \mathrm{W}(D_i)$

Eine Wahl der Ländergewichte, die (25) maximiert, impliziert, dass die Risikogewichte für alle Länder dieselben sind, d.h. dass gilt:[18]

(26) $\theta_i W(D_i) = \theta_j W(D_j) \ \ \forall\, ij$

Ein solcher Zustand kann als eine Gewichtung minimalen (unsystematischen) Risikos und maximaler Diversifikation im Portfolio interpretiert werden.

Bildet man nun eine gewichtete Summe aus Diversifikationsindex (25) und zu erwartender Portfoliorendite (24), so lässt sich für die Wahl der Ländergewichte $(\theta_1; \dots.; \theta_N)$ folgende Zielfunktion formulieren:

(27) $max_{(\theta_1;\dots;\theta_N)} \rightarrow \alpha S + (1-\alpha) E(\tilde{R}_P)$

$= \alpha[1 - \sum_{i=1}^{N} \theta_i^2 \mathrm{W}(D_i)\ ] + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{N} \theta_i R_i [1 - W(D_i)]$

Die Wahl eines konkreten Diversifikationsgewichtes, d.h. α-Wertes entscheidet darüber, ob der Optimierungsprozess schwerpunktmäßig an der Risikodiversifizierung ($\alpha = 1$) oder an der Renditemaximierung ($\alpha = 0$) ausgerichtet sein soll.

[18] Selbstverständlich muss für jede Ländergewichtung die Bedingung gelten, dass die Summe aller Gewichte 100 % ist. Legt man dies der Maximierung von (25) als Nebenbedingung zugrunde, dann ergibt sich (26) durch die notwenigen Bedingungen für ein Maximum der entsprechenden Lagrange-Funktion $L(\theta_1; \dots; \theta_N; \lambda) = [1 - \sum_{i=1}^{N} \theta_i^2 \mathrm{W}(D_i)] + \lambda(\sum \theta_i - 1)$. Diese lauten bekanntermaßen, dass die partiellen Ableitungen der von $L(\theta_1; \dots; \theta_N; \lambda)$ nach den einzelnen $\theta\acute{}s$ gleich Null sind:
$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = -2\theta_i W(D_i) + \lambda = 0 \ \forall i$. Damit sind aber alle Risikogewichte der Hälfte des Lagrange-Multiplikators angeglichen und zugleich alle identisch, d.h. es gilt (26).

4. Diskussion und mögliche Erweiterungen

Die vermutlich markanteste Eigenschaft der vorgeschlagenen Anleihestrategie besteht drin, dass bei ihrer Umsetzung auf jede Art von Prognose verzichtet wird. Relevant für die zu treffenden Entscheidungen sind lediglich öffentlich verfügbare Marktinformationen. Der Hintergrund ist, dass sämtliche empirischen Untersuchungen zum Erfolg von Marktprognosen äußerst desillusionierend sind: Die Umsetzung von Marktprognosen im Rahmen von Anlagestrategien liefert in der Regel keinen Mehrwert. Dies gilt auch und besonders für Zinsprognosen.

Eine weitere Besonderheit ist darin zu sehen, dass das Minimum-Risiko-Portfolio, welches sich bei maximaler Diversifikation (α=1) ergibt, eine Ländergewichtung aufweist, bei der die Risikogewichte, d.h. die mit den impliziten Ausfallwahrscheinlichkeiten multiplizierten Ländergewichte für alle Länder identisch sind. Im Ergebnis erhält man dann ein Staatsanleiheportfolio, in dem auch die sogenannten EUR-Krisenstaaten enthalten sind – wenn auch mit einer deutlichen Untergewichtung.

Selbstverständlich gibt es eine Reihe an Möglichkeiten, den vorgestellten Ansatz zu verallgemeinern und zu erweitern.

Zunächst sei hier die Zweistufigkeit des Ansatzes genannt: Unabhängig von der letztlichen Ländergewichtung werden in einem ersten Schritt für alle Länder die Restlaufzeiten ermittelt, bei der die jeweiligen Zinsstrukturbeiträge maximal sind. An diesen Festlegungen knüpft dann in einem zweiten Schritt die vorgestellte, spezielle Ländergewichtungsmethode an. Nun wäre es durchaus denkbar, beides zusammenzufassen und Zinsstrukturpositionierungen und Ländergewichtungen simultan zu bestimmen. Vermutlich ist dies sogar der theoretisch saubere Weg. Andererseits ist eine zweistufige Vorgehensweise flexibler, denn auf diese Weise können die Ländergewichte unabhängig von den entsprechenden Restlaufzeiten festgelegt werden.

Eine weitere interessante Erweiterungsmöglichkeit besteht in der Endogenisierung des Diversifikationsgewichtes α. Eine Möglichkeit hierzu besteht beispielsweise darin, die konkrete Höhe von α von einer Art „EUR-Stressfaktor" abhängig zu machen, der sich wiederum aus dem Verhältnis von impliziten zu realen Ausfallwahrscheinlichkeiten bestimmen lässt. Aktuell muss dieser Wert exogen vom Anwender festgelegt werden und fließt dann parametrisch in die Optimierung der Ländergewichtung ein. Aber auch hier gilt: Eine solche Erweiterung hat sowohl Vor- als auch Nachteile. Einerseits würde dadurch der gesamte Ansatz weiter objektiviert, andererseits verzichtet man dadurch auf die Möglichkeit, alternative Festlegungen des Diversifikationsgewichtes (beispielsweise in Abhängigkeit von der subjektiven Risikoaversion) ins Modell zu integrieren.

Literatur:

Fabozzi, F., J., 2013, Bond Markets, Analysis, and Strategies, Pearson Publishing.

Fabozzi, F., J., Mann, S., 2012, The Handbook of Fixed Income Securities, McGraw-Hill.

Felsenheimer, J., Klopfer, W., von Altenstadt, U., 2019, Credit Default Swaps – Handelsstrategien, Bewertung und Regulierung, Wiley Finance Edition.

Hull, J., C., 2018, Options, Futures, and Other Derivatives, Pearson Education Limited.

Wong, M., A., 1993, Fixed Income Arbitrage, Wiley Finance Edition,

Technische Hochschule Ingolstadt

Working Paper

Heft Nr. 57 aus der Reihe
„**Arbeitsberichte – Working Papers**"

ISSN 1612-6483
Ingolstadt, im Dezember 2020

Prof. Dr. Stefan May

Prognosefreie Zinskurvenpositionierung und Länderallokation für ein EUR-Staatsanleihen-Portfolio

Impressum

Herausgeber
Der Präsident der Technischen Hochschule Ingolstadt
Esplanade 10, 85049 Ingolstadt
Telefon: +49 841 9348-0
Fax: +49 841 9348-2000
E-Mail: info@thi.de

Druck
Hausdruck

Internet
Alle Themen aus der Reihe „Arbeitsberichte – Working Papers", können Sie unter der Adresse www.thi.de nachlesen.